Sujet N. 5

Baccalauréat tunisien

Séries MATH-SCIENCES et MATH-TECHNIQUE

Epreuve obligatoire

(1ère Session de Juin 1978)

1er Exercice :

Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\,.\cos\theta = 0$ avec $\theta \in [0, \pi[$.

1°) Résoudre cette équation.

On désignera par z' la racine dont le cœfficient b de la partie imaginaire (ib) est positif et par z'' l'autre racine.

2°) On pose $z_1 = z' + i\sin\theta$ et $z_2 = z'' - i\sin\theta$

Soit M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 dans le plan complexe.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe 1.

b) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit l'intervalle $[0, \pi[$; en déduire l'ensemble des points M_2.

2e Exercice :

On dispose de deux boîtes contenant chacune 3 jetons indiscernables au toucher et numérotés 0, 1, 2. Une épreuve consiste à tirer, au hasard, un jeton de chaque boîte.

Soit X l'application qui, à chaque épreuve, associe la somme des nombres inscrits sur les jetons tirés et soit Y l'application qui, à chaque épreuve, associe la valeur absolue de la différence des nombres inscrits sur les jetons tirés.

1°) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales de X et de Y.

2°) Calculer les espérances mathématiques de X, Y et X.Y.

Problème

Pour tout couple de réels (a, b), on considère la fonction $f_{(a,b)}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\begin{cases} f_{(a,b)}(x) = x^2 (a + b \operatorname{Log} x) & \text{si } x > 0 \\ f_{(a,b)}(0) = 0 \end{cases}$

A) On pose $g = f_{(1,-1)}$

1°) Montrer que la fonction g est continue au point 0 et qu'elle est dérivable en ce point.

2°) Etudier les variations de la fonction g et tracer sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé. (On donne : $e = 2.71...$; $\sqrt{e} = 1.68...$).

B) On désigne par D l'espace vectoriel réel des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et par E l'ensemble des fonctions $f_{(a,b)}$ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$u = f_{(1,0)} \quad \text{et} \quad v = f_{(0,1)}$$

1°) a) Vérifier que u et v appartiennent à D.

b) Montrer que E est le sous-espace vectoriel de D engendré par u et v.

c) Montrer que (u, v) est une base de E.

2°) On désigne par $\bar{f}_{(a,b)}$ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\bar{f}_{(a,b)}(x) = x f'_{(a,b)}(x)$.

a) Montrer que $\bar{f}_{(a,b)}$ est un élément de E.

b) Soit l'application σ :

$$\begin{aligned} \sigma : E &\longrightarrow E \\ f_{(a,b)} &\longmapsto \bar{f}_{(a,b)} \end{aligned}$$

Montrer que σ est un endomorphisme de E ; déterminer sa matrice A dans la base (u, v).

3°) a) Vérifier que $A^2 - 4A + 4I = O$

(I est la matrice unité, O est la matrice nulle)

b) En déduire que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 f''_{(a,b)}(x) - 3x f'_{(a,b)}(x) + 4 f_{(a,b)}(x) = 0$

C) Soit s un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1°) a) Calculer $I(s) = \int_s^1 t^4 \operatorname{Log} t \, dt$; en déduire $\lim_{s \to 0^+} I(s)$

b) On pose $J(s) = \int_s^1 t^4 (\operatorname{Log} t)^2 \, dt$

Trouver une relation entre $I(s)$ et $J(s)$; en déduire $\lim_{s \to 0^+} J(s)$

2°) On pose $K(s) = \int_s^1 \left[f_{(a,b)}(t) \right]^2 dt$. Déterminer $\lim_{s \to 0^+} K(s)$.